0.2.3. Coloquio 20/02/07.

61.03 ANÁLISIS MATEMÁTICO II COLOQUIO 20/02/07
TEMA 1

---

1. Sea $F(x,y,z) = (\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, -\frac{1}{1+x^2+y^2})$. Hallar el flujo del rotor de F a través de la superficie descripta por $z = x^2+y^2, 4x^2+y^2 \leq 1$, orientada de manera que su normal tenga coordenada z negativa.

---

2. Sea S la superficie descripta por

$$y^2 + z^2 = 16, 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y, 0 \leq z$$

Hallar el flujo a través de S, orientada de manera que su normal tenga coordenada y positiva, del campo $F(x,y,z) = (3z^2 - x, -x, -y)$.

---

3. Sea $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^1. Calcular el flujo de $F(x,y,z) = (x + ze^y, Q(x,z), 5z)$ a través de la superficie descripta por $x^2+y^2+z^2 = 16, z \geq 2$ orientada con el normal de coordenada z negativa.

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) Dada una función C^2 $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla(F)(0,0,1) \neq (0,0,0)$, y sabiendo que el plano tangente a la superficie de ecuación $F(x,y,z) = 0$ en $(0,0,1)$ contiene a la recta de ecuaciones $z = 1, x - y = 0$, calcular la derivada direccional $F'((0,0,1),(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0))$.

(**b**) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^2 y $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio tal que $f(x,y) > 0$ para $(x,y) \in D$. Sabiendo que el flujo del campo $(0,0,2z)$ a través de la superficie descripta por $z = f(x,y), (x,y) \in D$ orientada con el normal de coordenada z positiva es 5, calcular

$$\iint_D f(x,y)\ dxdy$$

---

5. Describir una curva en $\mathbb{R}^2$ que pase por $(2,3)$ y tal que su pendiente en cada punto (x,y) sea $\frac{2x}{1+y^2}$.

0.2.4. Coloquio 27/02/07.

61.03 ANÁLISIS MATEMÁTICO II COLOQUIO 27/02/07
TEMA 1

---

1. Hallar el volumen del sólido V descripto en coordenadas cilíndricas por $0 \leq z \leq 10 - \rho^2, \rho^2 \geq 4$.

---

2. Sea $F(x, y, z) = (2x + P(x, y, z), y + P(x, y, z), 7)$ siendo P un campo escalar C^2. Suponiendo que $\nabla \times F = 0$, calcular la circulación de F a lo largo de la curva parametrizada por $t \mapsto (\operatorname{sen} t, \cos t, 1)$, con t desde 0 a $\pi/2$.

---

3. Sea $F(x, y, z) = (x^2 - yz^2 + 2y, y^2 + xz^2, z^3)$. Hallar el flujo del rotor de F a través de la superficie descripta por $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4, z \geq 0$, orientada de manera que el normal se aleje del eje z.

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) Sea V un dominio acotado en $\mathbb{R}^3$ con borde regular S. Hallar a de manera que el flujo del campo $F(x, y, z) = (3x - y^2, ay - z^2, 3z + x^2)$ a través de S hacia el exterior de V sea 0.

(**b**) Hallar los extremos de $f(x, y) = x^2 + y^2$ restringida a la elipse de ecuación $4x^2 + y^2 = 1$. Interpretar geométricamente.

---

5. Hallar una solución $y(x)$ de la ecuación $(x^2 + 1)y' + 2xy = -1$ cuyo gráfico en $(1, y(1))$ tenga pendiente -1.

0.2.5. Coloquio 06/03/07.

61.03 ANÁLISIS MATEMÁTICO II COLOQUIO 06/03/07
TEMA 1

---

1. Hallar la longitud del trozo de curva descripto por $x^2+y^2=4, x-2\cos(z)=0, 0\leq z\leq \pi, y\geq 0$.

---

2. Sabiendo que el flujo del campo C^2 $F(x,y,z)=(x,-y,z+R(x,y))$ a través de la superficie descripta por $z=x+y, x^2+y^2\leq 1$ con el normal de componente z positiva es π, hallar su flujo a través de la superficie descripta por $z=0, x^2+y^2\leq 1$, orientada con el normal de componente z negativa. Justificar con cuidado.

---

3. Sabiendo que el flujo del rotor $\nabla\times F$ de un campo C^2 F a través de la superficie descripta por $z=x^2+y^2, (x-1)^2+y^2+z^2\leq 1$ con el normal de componente z positiva es 2, hallar el flujo de $\nabla\times F$ a través de la superficie descripta por $(x-1)^2+y^2+z^2=1, z\geq x^2+y^2$, con el normal con componente z positiva.

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) Sabiendo que la función C^2 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ satisface $f(2\cos(u),\text{sen}(u))=1+\cos(u)$ $\forall u\in\mathbb{R}$ y $f(0,v^2)=v^4$ $\forall v\in\mathbb{R}$, calcular $\nabla(f)(0,1)$.

(**b**) Hallar el flujo del campo $F(x,y,z)=(0,0,1)$ a través de la superficie descripta por

$$z=x-y, 0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1$$

orientada con el normal de componente z negativa.

---

5. Sabiendo que una partícula se mueve en el plano x,y y que su velocidad en cada punto (x,y) es $V(x,y)=(x,-y)$, hallar una ecuación para su trayectoria si se sabe además que a tiempo $t=0$ pasa por $(1,2)$.

Coloquio 5/07/07-Tema 1

1. Calcular el flujo del campo $f(x,y,z) = (x + e^{yz}, senxz + y, xy + z)$ a través de la frontera del cuerpo limitado por:
$z \leq 2 - \sqrt{x^2 + (y-1)^2}, z \geq \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$

2. Calcular la circulación de un campo f sabiendo que:
$rot(f) = (x + y, z^2, 2 - x - y)$ a lo largo de la curva de ecuación $\varphi(t) = (cost, sent, 1 - cost)$ con $t \epsilon (0, 2\pi)$

3. Hallar la masa del alambre cuya forma coincide con la de la curva intersección del cilindro $y = x^2$ y el plano $y + z = 2$ en el primer octante, sabiendo que su densidad en cada punto es proporcional a la distancia al eje y.

4. Dado el campo $f = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ Hallar la expresión de las líneas de campo.

5. Proponga dos funciones $f(y,z)$ y $g(x,y)$ no constantes y una constante k real tales que el flujo del campo vectorial:
$F(x,y,z,) = (2x + f(y,z), 3y + g(x,y), 2kz)$ a través de las paredes del sólido definido por:
$x \geq z \geq 0$, $x^2 + y^2 - 2x \leq 0$, coincida con el volumen de dicho sólido.

Coloquio 12/07/07-Tema 1

1. Hallar el flujo del campo $F(x, y, z) = (x^2 + y, y + x, -zx^2)$a través de la superficie frontera del sólido descripto por las siguientes ecuaciones: $0 \leq z \leq 4 - x^2$, $0 \leq y + z \leq 8$ considerando normal entrante.

2. Dada la siguiente integral en coordenadas polares:
$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{4}{cos\theta + sen\theta}} \rho^4 cos\theta \; d\rho \; d\theta$, expresar la integral en coordenadas cartesianas y calcularla.

3. Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones $\mathcal{C}^2$, el campo vectorial:
$F(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), 4)$, y D la región descripta por:
$1 \leq z \leq 2$, $x^2 + y^2 \leq 4$. Suponiendo que $\int\int\int_D \nabla.F dxdydz = 5$
Calcular el flujo de F a través de S siendo S la superficie cilíndrica definida en coordenadas cilíndricas por $\rho = 2$ con $1 \leq z \leq 2$. Considere normales **entrantes**.

4. Indicar el valor del área de una lámina plana de densidad constante cuyo borde es una curva cerrada simple $\mathcal{C}$ para que las coordenadas de su centro de masa sean:
$(x_G, y_G) = (\oint_{\mathcal{C}} x^2 dy, -\oint_{\mathcal{C}} y^2 dx)$

5. Sea $F(x, y, z) = \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ un campo vectorial $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$. Calcular el flujo de F a través de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ con $R > 0$.

Coloquio 19/07/07-Tema 2

1. Se sabe que el campo vectorial $F(x,y) = \big(x^2y + e^y, Q(x,y)\big) \in C^1$ en $D \subseteq \mathbb{R}^2$, siendo D la región definida en coordenadas polares por las siguientes ecuaciones:
   $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$
   $0 \leq \rho \leq 2$
   cuya frontera es la curva simple cerrada C. Justificar como debe elegirse $Q(x,y)$ para que las circulaciones de $F(x,y)$ a lo largo de la curva C (orientada en sentido antihorario) coincidan con el área de$D$.

2. Calcular el flujo del $\nabla \times F(x,y,z) = (5x + seny, -4y + cosz, -z)$ a través de la superficie $x^2 + y^2 + (z-5)^2 = 32$, con $z \geq 1$. Considere la normal con componente z positiva.

3. Calcular la coordenada y del centro de masa de la placa de densidad 1 limitada por las curvas

$$|x-1| + y = 0 \quad ; \quad x^2 + y^2 = 1$$

4. 1. Sea $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ dada por: $f(x,y,z) = g(r)$ donde $\mathbf{r} = (x,y,z)$ $r = |\mathbf{r}|$ y $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ diferenciable. Calcule el flujo de ∇f a través de la porción de cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ encerrada en el interior del cilindro de ecuación:
      $(x+3)^2 + (y-2)^2 = \frac{1}{4}$.
   2. Hallar las curvas planas tales que la recta normal en todo punto pasa por el origen.

5. Demuestre que el flujo de $F(x,y,z) = (5x+ye^z, Q(x,z), z)$ a través del trozo de esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2 = 13$ con $z \geq 2$ no depende de la función $Q(x,z)$. Indique gráficamente la orientación que ha elegido para el versor normal a la superficie, y otras hipótesis que se debieran considerar.

Coloquio 2/08/07-Tema 1

1. Sea $\mathbf{F} = (\frac{x^2y^3}{3} - ky, \frac{x^3y^2}{3})$ y sea Γ el borde de la elipse con centro en $\mathbf{0}$ y semiejes 4 y 6 .Cual es el valor que debe tener la constante k para que la circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo de Γ coincida con el área de la elipse.

2. Calcular el flujo del campo vectorial $\vec{F} = (x^2 + y^2, x^2 + y^2, 2)$ a través de la superficie abierta definida por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $1 \leq z \leq 4$ de modo que en el cálculo intervenga el teorema de Gauss.

3. La rapidez de desintegración de una sustancia radiactiva es proporcional a la cantidad de sustancia presente. Se sabe que inicialmente hay 50 gramos de sustancia y al cabo de 3 días quedan solamente 10 gramos. ¿Qué porcentaje de la cantidad original quedará al cabo de 4 días?

4. Se tiene un campo de fuerzas eléctricas $\mathbf{E}$ tal que $rot\mathbf{E} = (-3x, 2y, z)$. Hallar la circulación de $\mathbf{E}$ sobre el borde de la semiesfera ubicada en el semiespacio superior de radio 1 y con centro en el origen de coordenadas.

5. Hallar el volumen de la región definida por las siguientes ecuaciones:
   $x^2 + (y-2)^2 \leq 4$
   $2z \leq y \leq 4z$.

Coloquio 9/08/07-Tema 1

1. Hallar el flujo de $F(x, y, z) = (x^2, 2xy, z - 4xz)$ a través del tetraedro determinado por $x + y + z = 1$ con los planos coordenados en el primer octante.

2. ¿Existe alguna trayectoria que una el punto $(0, 1)$ con el $(1, 0)$ para la cual el trabajo del campo de fuerzas $F(x, y) = (ye^x, e^x - y^2)$ valga $\frac{2}{3}$?¿Y existe alguna para la cual el trabajo valga $\frac{3}{2}$?

3. Halle una expresión para la familia de líneas de campo del campo vectorial $F(x, y) = (\frac{1}{2x-y}, \frac{1}{x})$

4. Una partícula recorre la curva que resulta de la intersección del paraboloide $z = x^2 + y^2$ con el plano $x + y + z = 1$ bajo la acción de un campo de fuerzas $F(x, y, z) = (x^2 lnz, seny, \frac{x^3}{3z})$. Calcular el trabajo de dicha fuerza.

5. Considere la siguiente integral definida en coordenadas esféricas:

$$\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \rho^3 \sin 2\varphi d\alpha d\varphi d\rho$$

   Calcule la integral y exprese la integral en coordenadas cartesianas.

Coloquio 20/12/07-Tema 1

1. Sea S la superficie de ecuación $y^2 + z^2 = 4$ en el primer octante, con $x+y \leq 2$. Calcule la circulación de $f(x, y, x) = (xy, y, yz)$ a lo largo de la curva frontera de S con orientación $(0, 0, 2) \rightarrow (0, 2, 0) \rightarrow (2, 0, 2) \rightarrow (0, 0, 2)$.

2. Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$ definido por $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \leq 1$. Calcule el área de D integrando un campo vectorial conveniente a lo largo de su frontera.

3. Dadas $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ y el campo vectorial $F(x, y, z) = (f(y, z), ay, az + 1)$. Hallar a de manera que el flujo de F a través de la superficie descripta por: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con $z \geq 0$ orientada con normal de coordenada z positiva, sea igual a 4π.

4. Sea el campo vectorial $V = (-1 + 3y, 3x)$. Hallar la línea de campo y la curva equipotencial que pasan por el punto $(1, 2)$ y comprobar que éstas son ortogonales en dicho punto.

5. Sea $D \subseteq \mathbb{R}^3$ descripto por $x^2 + y^2 - 2y \leq 3$, $1 \leq x + z \leq 2$ Graficar D y calcular su volumen.